CHAPITRE 3
LES DEUX TYPES D'ACTIONS MECANIQUES

On rappelle que les deux types d'actions mécaniques sont les **actions à distance** et les **actions de contact**.

I - MODELISATION D'UNE ACTION MECANIQUE A DISTANCE :

I - 1 Nature des actions mécaniques à distance :

Nous avons déjà vu au Chapitre 2 que les actions mécaniques à distance peuvent être dues à des champs de pesanteur, magnétique, électromagnétique, électrostatique... mais que seul le champ de pesanteur, c'est à dire le poids, est utilisé en BTP.

Dans chacun de ces cas, on remarque que la force s'exerce sans que les solides ne soient en contact.

I - 2 Modélisation d'une action mécanique de pesanteur :

L'action mécanique à distance de pesanteur est l'action mécanique **exercée par la terre sur un solide**. Cette action correspond au **poids** d'un solide.

En effet, tous les corps s'attirent grâce à une force d'attraction dépendant des masses de chaque solide et de la distance les séparant. Ainsi, la terre attire tous les corps.

On modélise le poids par une force notée $\vec{P}$:
- de **direction** verticale (direction : objet - centre de la terre),
- de **sens** vers le bas (vers le centre de la terre),
- de **point d'application** G, centre de gravité du solide,
- d'**intensité $P = m \cdot g$**, avec m : masse du solide en kg et $g = 9{,}81\ m/s^2$, accélération de la pesanteur. g varie suivant l'altitude et la latitude entre 9,78 et 9,84 m/s^2. On prend souvent $g = 10\ m/s^2$.
- d'**unité** : le Newton, noté N.

Le torseur d'une action mécanique de pesanteur est donc un **glisseur**.

REMARQUE :

Il ne faut pas confondre masse et poids. La masse d'un solide reste constante partout dans l'univers, contrairement au poids. Sur la terre, un solide a un poids $P = m \cdot g$. Dans l'espace, un solide a la même masse mais un poids quasi-nul, et ainsi les corps flottent. Sur la lune, le même solide a un poids dix fois plus faible que sur la terre, car il s'agit de l'action de la lune sur le solide.

Ainsi, **la masse caractérise la quantité de matière du solide**, et **le poids, l'action exercée par la terre sur le solide**.

I – 3 Calcul d'un poids (Rappels) :

$\boxed{\rho = m / v}$ avec ρ : masse volumique du solide en kg/m³
m : masse du solide en kg et v : volume du solide en m³

$\boxed{\gamma = P / v}$ avec γ : poids volumique en N/m³
P : poids du solide en N et v : volume du solide en m³.

avec $\boxed{\gamma = \rho \,.\, g}$

$\boxed{d = \rho / \rho_0}$ avec d : densité du solide (pas d'unité)
ρ_0 : masse volumique de l'eau (référence) = 1000 kg/m³

D'où, pour calculer le poids d'un solide, suivant ce qui est donné dans l'énoncé, c'est à dire masse, masse volumique, poids volumique ou densité, on choisit parmi les formules suivantes celle qui est à utiliser :

$\boxed{P = m \,.\, g}$ $\boxed{P = \rho \,.\, v \,.\, g}$ $\boxed{P = \gamma \,.\, v}$ $\boxed{P = d \,.\, \rho_0 \,.\, v \,.\, g}$

I - 4 Détermination du centre de gravité d'un solide :

I – 4 - 1 centre de gravité :

Le **centre de gravité** d'un solide est noté **G** et est le point d'application du poids, résultante de tous les poids élémentaires des petites quantités de matière qui constituent le solide. G est toujours au même endroit sur le solide. Mais G est aussi le **barycentre** de tous les points G_i, centre de gravité de chaque petite quantité de matière, affectés des coefficients poids P_i, poids de chaque petite quantité de matière.

Si l'on prend un repère d'origine O, alors $\boxed{\overrightarrow{OG} = \Sigma\,(P_i \,.\, \overrightarrow{OG_i}) / P}$ avec $\boxed{P = \Sigma\, P_i}$

Ce qui se traduit dans le repère (O, x, y, z), en nommant les coordonnées de G, x_G, y_G et z_G et celles des points G_i, x_{Gi}, y_{Gi} et z_{Gi} par

$\boxed{x_G = \Sigma\,(P_i \,.\, x_{Gi}) / P}$ $\boxed{y_G = \Sigma\,(P_i \,.\, y_{Gi}) / P}$ $\boxed{z_G = \Sigma\,(P_i \,.\, z_{Gi}) / P}$

I – 4 - 2 centre de masse :

Le **centre de masse** est le barycentre de tous les points G_i affectés des coefficients masse m_i.

On sait que $P_i = m_i\, g$ $P = m\, g$ et $m = \Sigma\, m_i$

Ainsi sur l'axe des x

$\mathbf{x_G} = \Sigma\,((m_i\, g)\, x_{Gi}) / \Sigma\,(m_i\, g) = [\, g\, \Sigma\,(m_i\, x_{Gi})\,] / [\, g\, \Sigma\, m_i\,] = \mathbf{[\,\Sigma\,(m_i\, x_{Gi})\,] / [\,\Sigma\, m_i\,]}$

On obtient la même chose sur les axes y et z. Ce qui se traduit dans le repère (O, x, y, z), en nommant les coordonnées de G, x_G, y_G et z_G et celles des points G_i, x_{Gi}, y_{Gi} et z_{Gi} par

$$\boxed{x_G = \Sigma (m_i \,.\, x_{Gi}) / m} \qquad \boxed{y_G = \Sigma (m_i \,.\, y_{Gi}) / m} \qquad \boxed{z_G = \Sigma (m_i \,.\, z_{Gi}) / m}$$

Ainsi **les centres de masse et de gravité sont toujours confondus**. On peut donc très bien déterminer un centre de masse quand on demande un centre de gravité.

I – 4 - 3 centre de volume : (pour les solides homogènes)

Le **centre de volume** est le barycentre de tous les points G_i affectés des coefficients volume v_i.

Un solide homogène possède une masse volumique constante partout.
Ainsi, $\rho_i = \rho$ et $m_i = \rho_i \, v_i = \rho \, v_i$ avec $v = \Sigma \, v_i$

$$x_G = \Sigma ((\rho \, v_i) \, x_{Gi}) \, / \, \Sigma (\rho \, v_i) = [\rho \, \Sigma (v_i \, x_{Gi}) \,] \, / \, [\rho \, \Sigma v_i \,] = \mathbf{[\, \Sigma \, (v_i \, x_{Gi}) \,] / [\, \Sigma \, v_i \,]}$$

On obtient la même chose sur les axes y et z. Ce qui se traduit dans le repère (O, x, y, z), en nommant les coordonnées de G, x_G, y_G et z_G et celles des points G_i, x_{Gi}, y_{Gi} et z_{Gi} par

$$\boxed{x_G = \Sigma (v_i \,.\, x_{Gi}) / v} \qquad \boxed{y_G = \Sigma (v_i \,.\, y_{Gi}) / v} \qquad \boxed{z_G = \Sigma (v_i \,.\, z_{Gi}) / v}$$

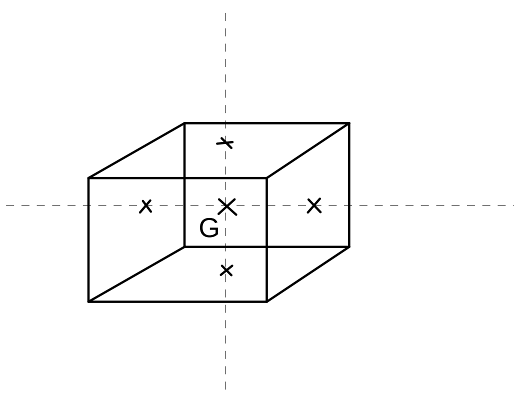
Dans le cas d'un solide homogène, les centres de volume, de masse et de gravité sont confondus.

Ainsi quand on demande le centre de gravité d'un solide homogène, il est plus facile de déterminer son centre de volume puisque cela revient au même**.**

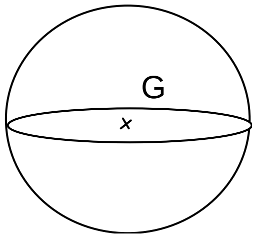
En exercices, certains solides donnés dans les énoncés sont des solides homogènes composés de plusieurs volumes simples. Il suffit donc de décomposer les volumes donnés en plusieurs volumes simples et utiliser les 2 théorèmes suivants valables pour déterminer les centres de volumes simples (parallélépipède, sphère, cylindre) :

Si un volume possède un axe ou un plan de symétrie, le centre de volume se trouve dessus.
Si un volume possède un diamètre, le centre de volume se trouve dessus.

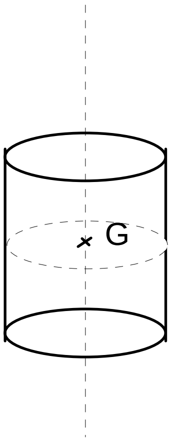
** cas d'un parallélépipède :*



** cas d'une sphère :*

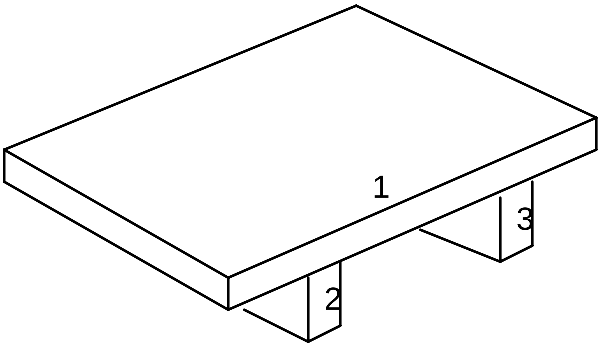


** cas d'un cylindre :*



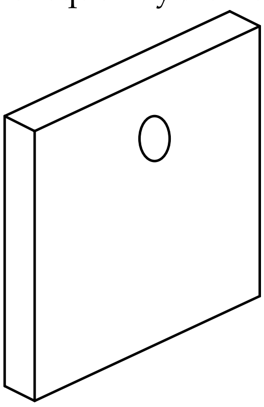
Exemples :

1°) Soit un plancher composé d'une plaque et deux poutres,



la dalle et les deux poutres forment trois parallélépipèdes.

2°) Soit un mur dans lequel il y a un trou,



Il faudra considérer un parallélépipède moins un cylindre.

I – 4 - 4 centre de surface : (cas des solides homogènes ayant même section sur toute leur longueur)

Le **centre de surface** est le barycentre de tous les points G_i affectés des coefficients surface S_i.
Or, $v_i = S_i$ L et que v = S L, La longueur du solide est L. et $S = \Sigma S_i$

$$x_G = \Sigma ((S_i L) x_{Gi}) / \Sigma (S_i L) = [L \Sigma (S_i x_{Gi})] / [L \Sigma S_i] = \mathbf{[\Sigma (S_i x_{Gi})] / [\Sigma S_i]}$$

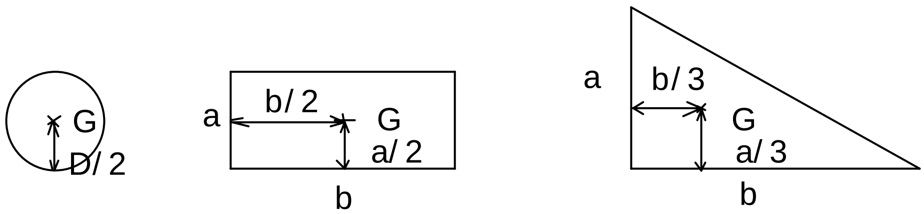
On obtient la même chose sur les axes y et z. Ce qui se traduit dans le repère (O, x, y, z), O se trouvant à une extrémité du solide, et en nommant les coordonnées de G, x_G, y_G et z_G et celles des points G_i, x_{Gi}, y_{Gi} et z_{Gi} par :

$$\boxed{x_G = \Sigma (S_i . x_{Gi}) / S} \qquad \boxed{y_G = \Sigma (S_i . y_{Gi}) / S} \qquad \boxed{z_G = L / 2}$$

Pour un solide homogène possédant une même section S sur toute une longueur L, les centres de surface, de volume, de masse et de gravité sont confondus.

Ainsi quand on demande le centre de gravité d'un solide homogène ayant même section sur toute sa longueur, il est plus facile de déterminer son centre de surface puisque cela revient au même.

En exercices, la plupart des solides donnés dans les énoncés seront des solides homogènes ayant sur toute leur longueur même section composée de plusieurs surfaces simples. Les surfaces simples rencontrées sont des cercles, des rectangles et des triangles dont les centres de surface sont donnés ci-dessous. Il suffit donc de décomposer les sections données en un minimum de surfaces simples et appliquer les formules ci-dessus pour x_G et y_G.



Remarques :

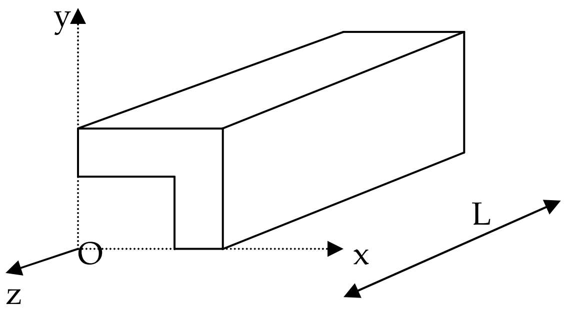
1°) Attention pour le calcul des coordonnées, x_G et y_G doivent être calculés comme la distance horizontale pour x et verticale pour y **à partir de O**.

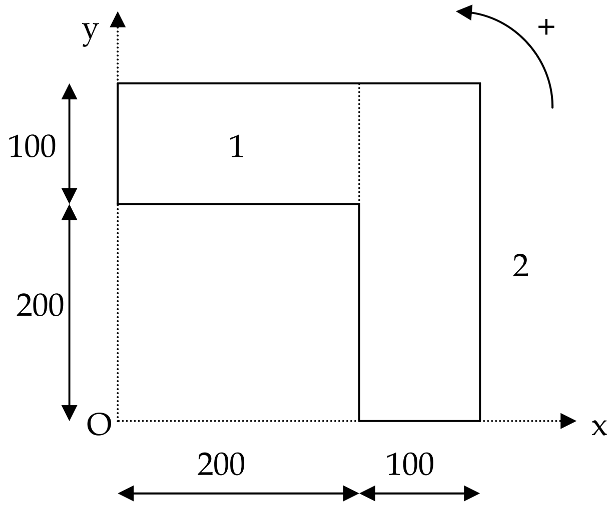
2°) S'il existe un **axe de symétrie, G se trouve dessus**. Il faut donc rechercher tous les axes de symétrie dès le début. Car s'il y en a, cela évite des calculs. Si Oy est axe de symétrie, c'est x_G qui n'est pas à calculer. Si c'est Ox qui est axe de symétrie, c'est y_G qui n'est pas à calculer.

3°) Pour rendre les calculs plus faciles, on place l'origine O du repère le plus à gauche et le plus bas sur la figure, car sinon, il ne faut pas oublier le signe - des coordonnées situées à gauche de O pour x et en dessous de O pour y. S'il existe un axe de symétrie, il peut être utile de placer O sur cet axe.

I – 4 – 5 exemple d'application :

1°) Soit le solide suivant homogène, déterminez l'emplacement de G en utilisant le découpage suivant.





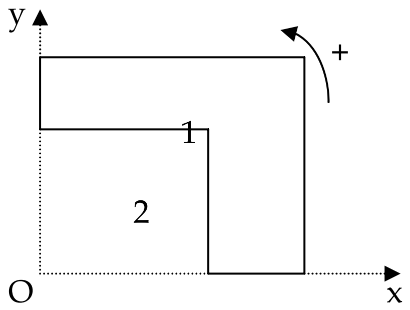
On remarque que ce solide est homogène et a une même section en forme de L sur toute sa longueur. On peut donc déterminer un centre de surface puisqu’il est confondu avec le centre de gravité.
On remarque sur la figure que $z_G = - L/2$.

	S_i m^2	**x_{Gi} m**	**y_{Gi} m**	**$S_i . x_{Gi}$ m^3**	**$S_i . y_{Gi}$ m^3**
1	**0,2 x 0,1 = 0,02**	**0,1**	**0,25**	**0,002**	**0,005**
2	**0,1 x 0,3 = 0,03**	**0,25**	**0,15**	**0,0075**	**0,0045**
Σ Si	**0,05**			**$\Sigma S_i . x_{Gi}$ = 0,0095**	**$\Sigma S_i . y_{Gi}$ = 0,0095**

d’où, $\mathbf{x_G}$ = 0,0095/0,05 = **0,19 m** et $\mathbf{y_G}$ = 0,0095/0,05 = **0,19 m**

Il est logique d’obtenir la même chose pour x_G et y_G car il existe un axe de symétrie situé à 45° à partir de O. On place G sur le dessin et on remarque que G n'est pas forcément sur le solide.

2°) Soit le même solide homogène, déterminez l'emplacement de G en utilisant cet autre découpage.



1 correspond au carré 300 x 300 et 2 au carré 200 x 200.
Il faut faire 1 – 2.

On remarque que ce solide est homogène et a une même section en forme de L sur toute sa longueur L. On peut donc déterminer un centre de surface puisqu'il est confondu avec le centre de gravité.
On remarque sur la figure que z_G = - L/2.

	S_i **m^2**	**x_{Gi}** **m**	**y_{Gi}** **m**	**$S_i \cdot x_{Gi}$** **m^3**	**$S_i \cdot y_{Gi}$** **m^3**
1	**0,3 x 0,3** **= 0,09**	**0,15**	**0,15**	**0,0135**	**0,0135**
- 2	**- 0,2 x 0,2** **= - 0,04**	**0,1**	**0,1**	**- 0,004**	**- 0,0045**
Σ Si	**0,05**			**Σ $S_i \cdot x_{Gi}$ = 0,0095**	**Σ $S_i \cdot y_{Gi}$ = 0,0095**

d'où, **x_G =** 0,0095/0,05 = **0,19 m** et **y_G =** 0,0095/0,05 = **0,19 m**

On peut ne pas mettre les résultats sous forme de tableau mais il faut toujours donner les S_i, les x_{Gi} et les y_{Gi}. Pour cela, on écrit pour l'exemple précédent :

S_1 = 0,3 x 0,3 = 0,09 m^2 G_1 (0,15 m ; 0,15 m)
S_2 = - 0,2 x 0,2 = - 0,04 m^2 G_2 (0,1 m ; 0,1 m)

D'où, x_G = (0,09 x 0,15 – 0,04 x 0,1) / (0,09 – 0,04) = 0,19 m
y_G = (0,09 x 0,15 – 0,04 x 0,1) / (0,09 – 0,04) = 0,19 m

De toutes façons, il faut avant de faire les calculs donner tous les renseignements sur les S_i, les x_{Gi} et les y_{Gi}.

Dans les exercices, les découpages des surfaces en un minimum de sections simples ne sont pas données et ce sera à vous de le faire. Il faut donc bien réfléchir au début de chaque exercice.

II - MODELISATION D'UNE ACTION MECANIQUE DE CONTACT :

II – 1 Contact de deux solides :

Le contact entre 2 solides correspond toujours à une surface de contact si petite soit-elle.

En effet, un solide en contact avec un autre solide exerce dessus, une action qui est en fait l'ensemble défini par :

- la résultante de petites forces appliquées sur des surfaces élémentaire de somme, la surface de contact,
- et le moment de ces petites forces au centre géométrique de l'assemblage.

C'est cette résultante et ce moment que l'on cherche à déterminer en les plaçant dans un repère. (Pour les fluides, voir chapitre hydrostatique)

II - 2 Inconnues de liaison :

Une liaison est dite "**parfaite**" s'il n'existe pas de jeu dans les mouvements de la liaison et si le contact des surfaces est sans adhérence.

Au chapitre **1**, nous avons vu qu'il existait :

- dans l'**espace**, **10 liaisons** parfaites et **6 mouvements possibles** indépendants : 3 translations T_x, T_y, T_z et 3 rotations R_x, R_y, R_z ,

- et dans le **plan**, **3 liaisons** parfaites et **3 mouvements possibles** indépendants : 2 translations T_x et T_y et 1 rotation R_z, dans le plan (O, x, y).

En fait, un solide peut effectuer un mouvement par rapport à un autre solide suivant un axe, s'il n'existe rien qui l'empêche sur cet axe. Par contre, si le mouvement n'est pas possible, il existe quelque chose qui l'empêche : une force ou un moment.

Une force permet d'empêcher une translation, et un moment, une rotation.

Ces forces et ces moments sont appelés **inconnues de liaison**.

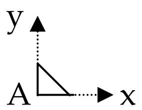
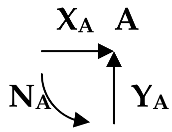
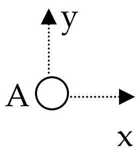
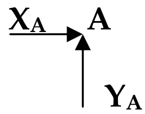
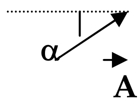
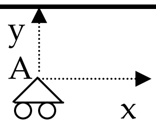
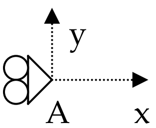
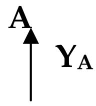
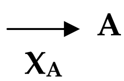
Ainsi, si la translation $\mathbf{T_x}$ est **empêchée**, il existe une inconnue de liaison **X**, force sur x qui empêche ce mouvement.

Si la translation $\mathbf{T_y}$ est **empêchée**, il existe une inconnue de liaison **Y**, force sur y qui empêche ce mouvement.

Si la rotation $\mathbf{R_z}$ est **empêchée**, il existe une inconnue de liaison **N**, moment autour de z qui empêche ce mouvement.

II - 3 Etude des 3 liaisons du BTP :

Ces trois liaisons sont situées dans un plan de symétrie (O, x, y) mais le torseur sera défini dans l'espace, de repère (O, x, y, z).

LIAISONS	SCHEMA avec repère	Mouvements libres indépendants	d	Mouvements empêchés indépendants	nombre d'inconnues	Torseur associé pris au centre géométrique A de l'assemblage	Action correspondant à la liaison
encastrement		**aucun**	**0**	**T_x T_y R_z**	**3**	${}_A\left\{\begin{matrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{matrix}\right\}$	
articulation		**R_z**	**1**	**T_x T_y**	**2**	**Si on ne connaît pas L'angle** ${}_A\left\{\begin{matrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}$ **on connaît l'angle α de la force** ${}_A\left\{\begin{matrix} A\cos\alpha & 0 \\ A\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}$	 
appui simple	 	**T_x R_z** **T_y R_z**	**2** **2**	**T_y** **T_x**	**1** **1**	${}_A\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}$ ${}_A\left\{\begin{matrix} X_A & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}$	 

Remarque : On connaît toujours la direction de la force correspondant à l'appui simple puisqu'elle est dirigée vers la pointe du triangle.